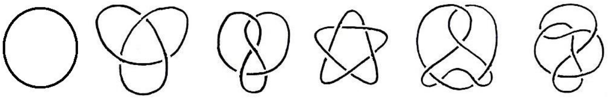
Τα Θεωρήματα *Alexander* και *Markov* της Θεωρίας Κόμβων

Πατεράκης Αντώνης

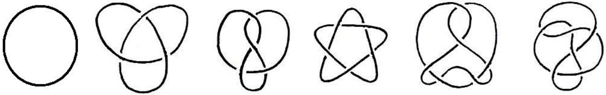
Αθήνα, Ιούλιος 2008

Ένας *κόμβος (knot)* K είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού h του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$

.



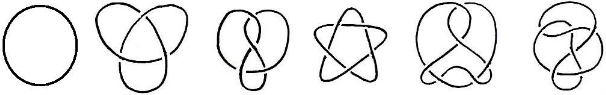
Ένας *κόμβος (knot) K* είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού *h* του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$
.



Η έννοια του κόμβου γενικεύεται ως εξής:

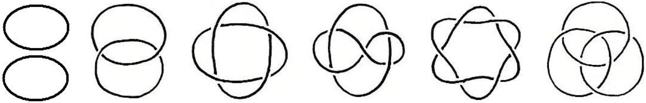
Ένας *κόμβος (knot) K* είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού *h* του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$

.

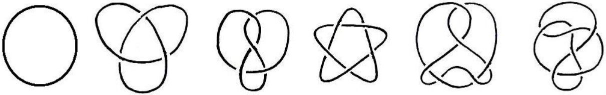


Η έννοια του κόμβου γενικεύεται ως εξής:

Ένας *κρίκος (link) L με n συνιστώσες* είναι η ομοιομορφική εικόνα από *n* αντίγραφα του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στον $\mathbb{R}^3$ ή στην $\mathbb{S}^3$.

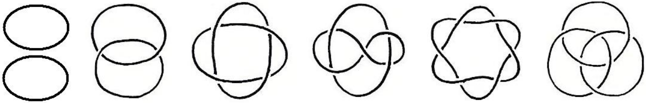


Ένας *κόμβος (knot) K* είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού *h* του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$
.



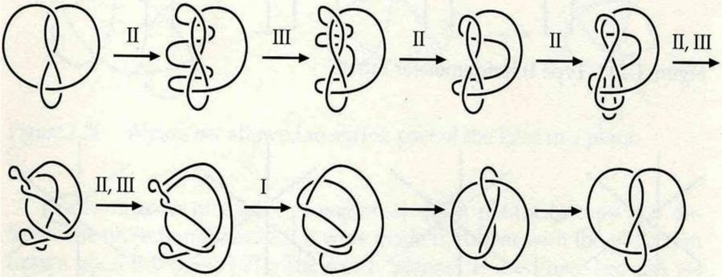
Η έννοια του κόμβου γενικεύεται ως εξής:

Ένας *κρίκος (link) L με n συνιστώσες* είναι η ομοιομορφική εικόνα από *n* αντίγραφα του κύκλου $\mathbb{S}^1$ στον $\mathbb{R}^3$ ή στην $\mathbb{S}^3$.



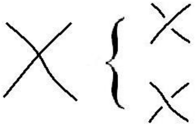
Αν σε ένα κόμβο ή κρίκο επιλέξουμε μια κατεύθυνση με την οποία θα κινούμαστε πάνω του, τότε καλείται *προσανατολισμένος*.

Δύο κόμβοι K_1, K_2 λέγονται *ισοτοπικοί*, συμβολίζουμε $K_1 \sim K_2$, όταν υπάρχει (προσανατολισμένος) ομοιομορφισμός του χώρου, $h : (\mathbb{S}^3, K_1) \to (\mathbb{S}^3, K_2)$, τέτοιος ώστε $h(K_1) = K_2$. Δηλαδή από τον ένα κόμβο να μπορούμε να καταλήξουμε στον άλλο με μία συνεχή ελαστική κίνηση στο χώρο.



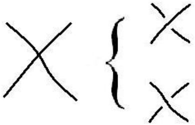
Τους κόμβους τους μελετάμε μέσω των διαγραμμάτων τους.

Διάγραμμα ενός κόμβου είναι μια προβολή του στο επίπεδο, η οποία περιέχει πεπερασμένο πλήθος διπλών σημείων (διασταυρώσεις), με την επιπλέον πληροφορία “πάνω” ή “κάτω”.



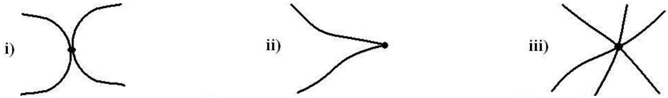
Τους κόμβους τους μελετάμε μέσω των διαγραμμάτων τους.

Διάγραμμα ενός κόμβου είναι μια προβολή του στο επίπεδο, η οποία περιέχει πεπερασμένο πλήθος διπλών σημείων (διασταυρώσεις), με την επιπλέον πληροφορία "πάνω" ή "κάτω".



Ένα διάγραμμα επίσης δεν περιέχει παθολογίες του τύπου:

i) σημεία επαφής ii) πτυχώσεις ή iii) τριπλά σημεία



Πρόταση 1. Κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον ένα διάγραμμα, δηλαδή κάθε προβολή μπορεί να μετατραπεί σε διάγραμμα.

Πρόταση 1. Κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον ένα διάγραμμα, δηλαδή κάθε προβολή μπορεί να μετατραπεί σε διάγραμμα.

Απόδειξη

- Γύρω από κάθε σημείο επαφής ή πτύχωση ή τριπλό σημείο γράφουμε δίσκο με ακτίνα ε_i που να μην τέμνεται με το υπόλοιπο διάγραμμα.
- Θέτουμε ε το μικρότερο ε_i και δ την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο σημείων του κόμβου.
- Για $\varrho = min\{\varepsilon, \delta\}$ διαταράσσουμε την ακτίνα από το μάτι μας κατά $\kappa < \varrho$ γύρω από κάθε παθολογικό σημείο.
- Δεδομένου ότι τα παθολογικά σημεία είναι πεπερασμένα, καταλήγουμε σε κανονική προβολή.

Πρόταση 1. Κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον ένα διάγραμμα, δηλαδή κάθε προβολή μπορεί να μετατραπεί σε διάγραμμα.

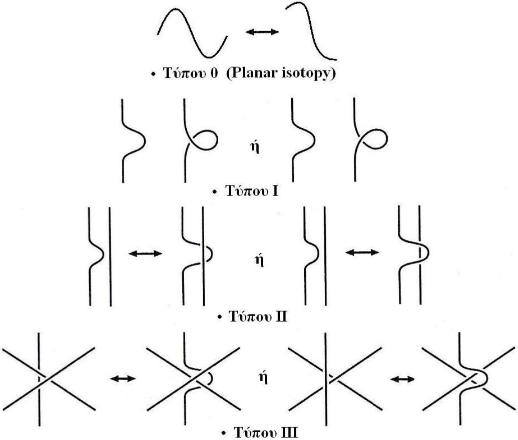
Απόδειξη

- Γύρω από κάθε σημείο επαφής ή πτύχωση ή τριπλό σημείο γράφουμε δίσκο με ακτίνα ε_i που να μην τέμνεται με το υπόλοιπο διάγραμμα.
- Θέτουμε ε το μικρότερο ε_i και δ την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο σημείων του κόμβου.
- Για $\varrho = min\{\varepsilon, \delta\}$ διαταράσσουμε την ακτίνα από το μάτι μας κατά $\kappa < \varrho$ γύρω από κάθε παθολογικό σημείο.
- Δεδομένου ότι τα παθολογικά σημεία είναι πεπερασμένα, καταλήγουμε σε κανονική προβολή.

Αυτό που μας επιτρέπει να μελετάμε την ισοτοπία στο επίπεδο αντί για το χώρο είναι το ακόλουθο θεώρημα.

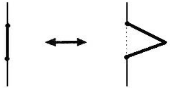
Θεώρημα Reidemeister. Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο διαγράμματά τους $D(K_2), D(K_2)$ διαφέρουν κατά ισοτοπία επιπέδου $(R0)$ και πεπερασμένο αριθμό κινήσεων Reidemeister, $RI, RII, RIII$:

Θεώρημα Reidemeister. Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο διαγράμματά τους $D(K_2), D(K_2)$ διαφέρουν κατά ισοτοπία επιπέδου ($R0$) και πεπερασμένο αριθμό κινήσεων Reidemeister, $RI, RII, RIII$:



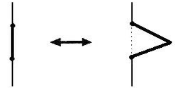
Απόδειξη

Μία *κίνηση* **Δ** είναι μία κίνηση ισοτοπίας ενός τμήματος ενός κόμβου κατά μήκος ενός τριγώνου στο χώρο, η επιφάνεια του οποίου δεν τέμνει τον κόμβο.

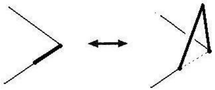


Απόδειξη

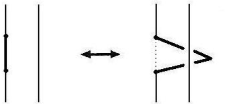
Μία *κίνηση* **Δ** είναι μία κίνηση ισοτοπίας ενός τμήματος ενός κόμβου κατά μήκος ενός τριγώνου στο χώρο, η επιφάνεια του οποίου δεν τέμνει τον κόμβο.



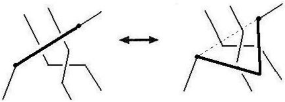
- Θεωρούμε τους κόμβους κατα τμήματα γραμμικούς.
- Κάθε ισοτοπία στο χώρο παράγεται από κινήσεις **Δ**.
- Εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις κινήσεων **Δ** στο χώρο.



• **Reidemeister Τύπου I**



• **Reidemeister Τύπου II**



• **Reidemeister Τύπου III**

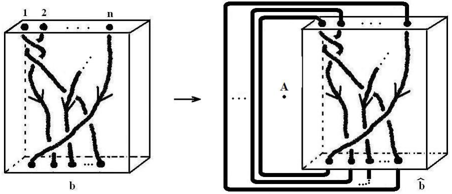
Κάποια άλλα τοπολογικά αντικείμενα συναφή με τους κόμβους είναι οι κοτσίδες.

Κάποια άλλα τοπολογικά αντικείμενα συναφή με τους κόμβους είναι οι κοτσίδες.

Μια *κοτσίδα* με n κλωστές είναι μια ομοιομορφική εικόνα n τόξων στο εσωτερικό του $[0,1] \times \varepsilon \times [0,1]$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε το σύνορο της εικόνας να είναι n αριθμημένα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{1\}$ και n αντίστοιχα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{0\}$. Επιπλέον, δεν έχει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα, άρα έχει έναν φυσικό προσανατολισμό από πάνω προς τα κάτω.

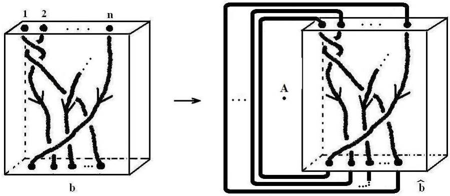
Κάποια άλλα τοπολογικά αντικείμενα συναφή με τους κόμβους είναι οι κοτσίδες.

Μια *κοτσίδα* με n κλωστές είναι μια ομοιομορφική εικόνα n τόξων στο εσωτερικό του $[0,1] \times \varepsilon \times [0,1]$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε το σύνορο της εικόνας να είναι n αριθμημένα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{1\}$ και n αντίστοιχα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{0\}$. Επιπλέον, δεν έχει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα, άρα έχει έναν φυσικό προσανατολισμό από πάνω προς τα κάτω.



Κάποια άλλα τοπολογικά αντικείμενα συναφή με τους κόμβους είναι οι κοτσίδες.

Μια *κοτσίδα* με n κλωστές είναι μια ομοιομορφική εικόνα n τόξων στο εσωτερικό του $[0,1] \times \varepsilon \times [0,1]$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε το σύνορο της εικόνας να είναι n αριθμημένα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{1\}$ και n αντίστοιχα σημεία του $I \times \varepsilon \times \{0\}$. Επιπλέον, δεν έχει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα, άρα έχει έναν φυσικό προσανατολισμό από πάνω προς τα κάτω.



Το *κλείσιμο* $\hat{b}$ μιας κοτσίδας b είναι η ένωση με απλά τόξα των αντίστοιχων αριθμημένων σημείων.

Άξονας μιας κλειστής κοτσίδας είναι μια ευθεία στο χώρο ως προς την οποία όλες οι κλωστές της στρέφονται με την ίδια φορά.

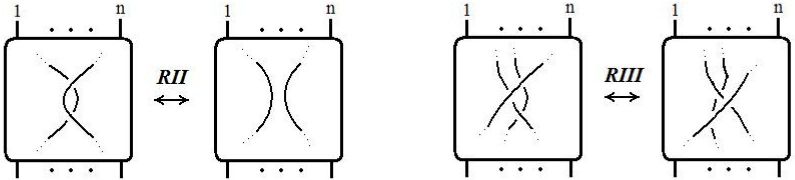
Άξονας μιας κλειστής κοτσίδας είναι μια ευθεία στο χώρο ως προς την οποία όλες οι κλωστές της στρέφονται με την ίδια φορά.

Μια κλειστή κοτσίδα είναι ένας προσανατολισμένος κόμβος ή κρίκος.

Άξονας μιας κλειστής κοτσίδας είναι μια ευθεία στο χώρο ως προς την οποία όλες οι κλωστές της στρέφονται με την ίδια φορά.

Μια κλειστή κοτσίδα είναι ένας προσαντολισμένος κόμβος ή κρίκος.

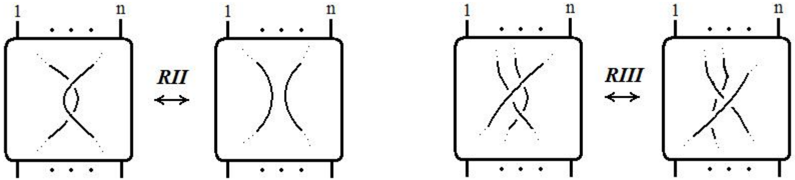
Όπως για κόμβους, έτσι και για κοτσίδες επιτρέπονται κάποιες ισοτοπίες. Σε αυτές δεν συμπεριλαμβάνεται η *RI* γιατί περιέχει μέγιστα και ελάχιστα. Επιτρέπονται όμως οι *RII* και *RIII*.



Άξονας μιας κλειστής κοτσίδας είναι μια ευθεία στο χώρο ως προς την οποία όλες οι κλωστές της στρέφονται με την ίδια φορά.

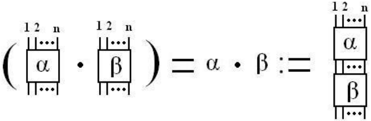
Μια κλειστή κοτσίδα είναι ένας προσαντολισμένος κόμβος ή κρίκος.

Όπως για κόμβους, έτσι και για κοτσίδες επιτρέπονται κάποιες ισοτοπίες. Σε αυτές δεν συμπεριλαμβάνεται η *RI* γιατί περιέχει μέγιστα και ελάχιστα. Επιτρέπονται όμως οι *RII* και *RIII*.

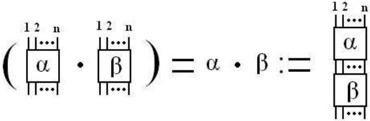


Η βασική ισοτοπία για τις κοτσίδες είναι η *RIII*.

Συμβολίζουμε το σύνολο των (κλάσεων ισοτοπίας) κοτσίδων με n κλωστές ως $\mathbf{B_n}$. Στο $\mathbf{B_n}$ ορίζουμε την πράξη "γινόμενο" μέσω της συγκόλλησης κοτσίδων.

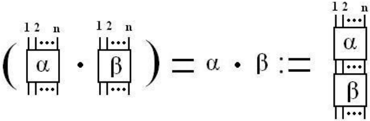


Συμβολίζουμε το σύνολο των (κλάσεων ισοτοπίας) κοτσίδων με n κλωστές ως $\mathbf{B_n}$. Στο $\mathbf{B_n}$ ορίζουμε την πράξη "γινόμενο" μέσω της συγκόλλησης κοτσίδων.



Θεώρημα. Η $(\mathbf{B_n}, \bullet)$ αποτελεί ομάδα.

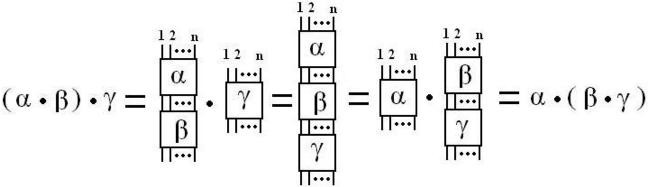
Συμβολίζουμε το σύνολο των (κλάσεων ισοτοπίας) κοτσίδων με n κλωστές ως $\mathbf{B_n}$. Στο $\mathbf{B_n}$ ορίζουμε την πράξη "γινόμενο" μέσω της συγκόλλησης κοτσίδων.



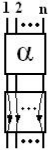
Θεώρημα. Η $(\mathbf{B_n}, \bullet)$ αποτελεί ομάδα.

Απόδειξη

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

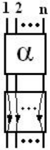


- Ουδέτερο στοιχείο:



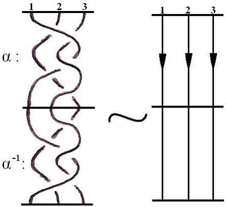
$$= \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- Ουδέτερο στοιχείο:



$$= \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- Αντίστροφο στοιχείο:



Πρόταση 2. Κάθε κοτσίδα μπορεί να ισοτοπηθεί σε γινόμενο από οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

Πρόταση 2. Κάθε κοτσίδα μπορεί να ισοτοπηθεί σε γινόμενο από οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

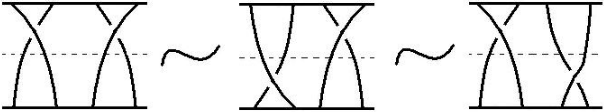
Απόδειξη

- Για τρεις γειτονικές κλωστές ισχύει λόγω μονοτονίας.

Πρόταση 2. Κάθε κοτσίδα μπορεί να ισοτοπηθεί σε γινόμενο από οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

Απόδειξη

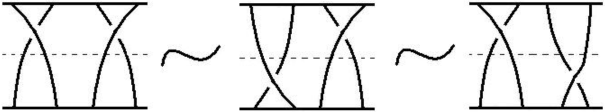
- Για τρεις γειτονικές κλωστές ισχύει λόγω μονοτονίας.
- Για μη γειτονικές κλωστές "χαμηλώνουμε" ή "ανεβάζουμε" με ισοτοπία επιπέδου



Πρόταση 2. Κάθε κοτσίδα μπορεί να ισοτοπηθεί σε γινόμενο από οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

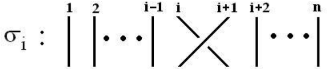
Απόδειξη

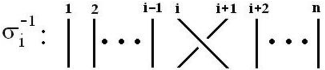
- Για τρεις γειτονικές κλωστές ισχύει λόγω μονοτονίας.
- Για μη γειτονικές κλωστές “χαμηλώνουμε” ή “ανεβάζουμε” με ισοτοπία επιπέδου



- Χωρίς βλάβη, εμφανίζονται μόνο δύο διασταυρώσεις στο ίδιο ύψος (με επαγωγή στον αριθμό ζευγών).

Ορίζουμε την *στοιχειώδη κοτσίδα* σ_i έτσι ώστε η i κλωστή να περνάει κάτω από την $i+1$ κλωστή και οι υπόλοιπες να παραμένουν σταθερές. Αντίστοιχα ορίζεται η σ_i^{-1}.

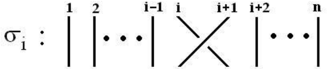


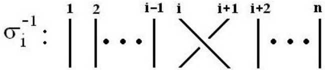


Ορίζουμε την *στοιχειώδη κοτσίδα* σ_i έτσι ώστε η i κλωστή να περνάει κάτω από την $i+1$ κλωστή και οι υπόλοιπες να παραμένουν σταθερές. Αντίστοιχα ορίζεται η σ_i^{-1}.

Κάθε κοτσίδα στη $\mathbf{B_n}$ περιγράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών κοτσίδων με μία διασταύρωση και αποτελεί μια "λέξη" των στοιχειωδών κοτσίδων σ_i. Η κοτσίδα που ακολουθεί γράφεται ως $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$.

Ορίζουμε την *στοιχειώδη κοτσίδα* σ_i έτσι ώστε η i κλωστή να περνάει κάτω από την $i+1$ κλωστή και οι υπόλοιπες να παραμένουν σταθερές. Αντίστοιχα ορίζεται η σ_i^{-1}.



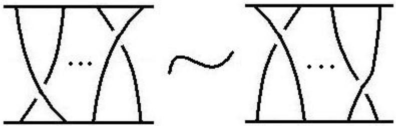


Κάθε κοτσίδα στη $\mathbf{B_n}$ περιγράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών κοτσίδων με μία διασταύρωση και αποτελεί μια "λέξη" των στοιχειωδών κοτσίδων σ_i. Η κοτσίδα που ακολουθεί γράφεται ως $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$.

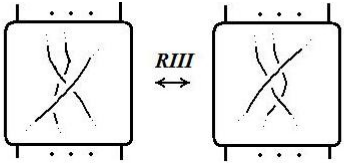
Από την Πρόταση 2 τα σ_i και σ_i^{-1} είναι γεννήτορες της ομάδας $\mathbf{B_n}$.

Αποδεικνύεται (Chow) ότι η *RIII* για κοτσίδες μαζί με τις ισοτοπίες επιπέδου λόγω της Πρότασης 2, ορίζουν μια παράσταση της ομάδας $\mathbf{B_n}$.

$$\mathbf{B_n} = \left\langle \ \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \ \middle| \ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle .$$



$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| > 1$



$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

(**Θεώρημα Alexander, 1923**) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος ή κρίκος μπορεί να ισοτοπηθεί σε μιά κλειστή κοτσίδα.

(**Θεώρημα Alexander, 1923**) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος ή κρίκος μπορεί να ισοτοπηθεί σε μιά κλειστή κοτσίδα.

Η σημαντικότητα του Θεωρήματος Alexander έγκειται στο γεγονός ότι κάθε κόμβος μπορεί να κωδικοποιηθεί από την αλγεβρική λέξη μιας κοτσίδας.

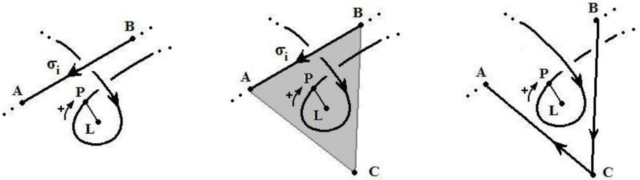
(**Θεώρημα Alexander, 1923**) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος ή κρίκος μπορεί να ισοτοπηθεί σε μιά κλειστή κοτσίδα.

Η σημαντικότητα του Θεωρήματος Alexander έγκειται στο γεγονός ότι κάθε κόμβος μπορεί να κωδικοποιηθεί από την αλγεβρική λέξη μιας κοτσίδας.

Το Θεώρημα Alexander έχει αποδειχθεί από τους:

- J.W. Alexander (1923)
- J.S. Birman (1976)
- H.R. Morton (1986)
- S. Yamada (1987)
- P. Vogel (1990)
- Σ. Λαμπροπούλου (1990)

- Προβάλλουμε τον κόμβο ή κρίκο στο επίπεδο.
- Ορίζουμε σημείο L ως προβολή του άξονα της τελικής κοτσίδας στο επίπεδο, ένα σημείο P που διατρέχει το διάγραμμα και μία θετική φορά περιστροφής του ακτινικού διανύσματος LP.
- Κρατάμε τα τμήματα στα οποία το LP κινείται με θετική φορά.

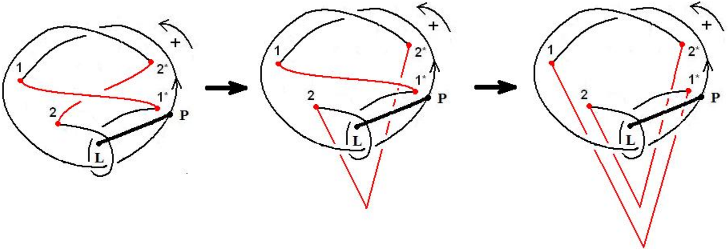


- Έστω σ ένα τμήμα στο οποίο το LP κινείται με αρνητική φορά. Υποδιαιρούμε, αν χρειαστεί το σ σε υποτμήματα σ_i ώστε κάθε σ_i να περιέχει μία διασταύρωση.
- Αν A, B τα άκρα του σ_i, τότε υπάρχει σημείο C τ.ώ. το τρίγωνο ABC να περιέχει το L.
- Αντικαθιστούμε το σ_i με τα BC και CA που περνάνε και τα δύο πάνω ή και τα δύο κάτω από το υπόλοιπο διάγραμμα αντίστοιχα με τη διασταύρωση του σ_i. (Κίνηση **Δ**).

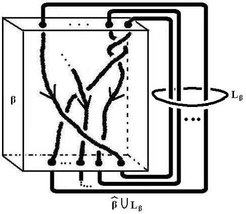
- Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλα τα αρνητικά υποτμήματα σ_i και το αποτέλεσμα είναι μια κλειστή κοτσίδα.

$\square$

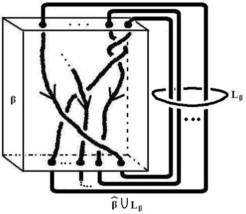
Για παράδειγμα, στο ακόλουθο διάγραμμα, μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε, ισοτοπούμε το αρνητικό τμήμα 22* και έπειτα το αρνητικό 11*.



Ο κρίκος $\hat{\beta} \cup L_\beta$ καλείται *πλήρες κλείσιμο* μιας κοτσίδας β, όπου L_β μια απλή κλειστή καμπύλη που αποτελεί τον *άξονα* του κλεισίματος $\hat{\beta}$.

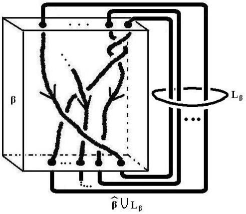


Ο κρίκος $\hat{\beta} \cup L_\beta$ καλείται *πλήρες κλείσιμο* μιας κοτσίδας β, όπου L_β μια απλή κλειστή καμπύλη που αποτελεί τον *άξονα* του κλεισίματος $\hat{\beta}$.



Έστω $K \cup L$ προσανατολισμένος κρίκος με L τετριμμένο. Το $K \cup L$ καλείται *braided* αν υπάρχει κοτσίδα β τ.ώ. το $K \cup L$ να είναι ισοτοπικό με το $\hat{\beta} \cup L_\beta$, όπου η ισοτοπία θα αντιστοιχεί το L στο L_β.

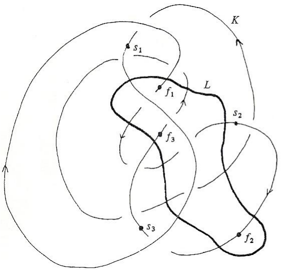
Ο κρίκος $\hat{\beta} \cup L_\beta$ καλείται *πλήρες κλείσιμο* μιας κοτσίδας β, όπου L_β μια απλή κλειστή καμπύλη που αποτελεί τον *άξονα* του κλεισίματος $\hat{\beta}$.

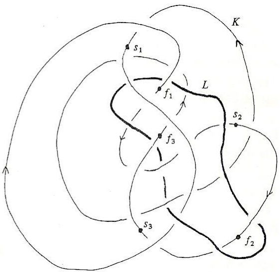


Έστω $K \cup L$ προσανατολισμένος κρίκος με L τετριμμένο. Το $K \cup L$ καλείται *braided* αν υπάρχει κοτσίδα β τ.ώ. το $K \cup L$ να είναι ισοτοπικό με το $\hat{\beta} \cup L_\beta$, όπου η ισοτοπία θα αντιστοιχεί το L στο L_β.

Threading καλείται η διαδικασία κατά την οποία για ένα διάγραμμα προσανατολισμένου κρίκου K βρίσκουμε μια απλή κλειστή καμπύλη L, έτσι ώστε ο κρίκος $K \cup L$ να είναι braided.

- Σημειώνουμε στο διάγραμμα ενός κόμβου K τα σημεία αρχής (s_i) και τέλους (f_i) των τόξων που δεν περνούν κάτω από άλλα τόξα του διαγράμματος (overpasses).
- Σχεδιάζουμε καμπύλη L που να διαχωρίζει τα s_i από τα f_i και να διασταυρώνεται εγκάρσια με τον K.
- Ακολουθώντας τον προσανατολισμό του K αλλάζουμε τις περιοχές στις διασταυρώσεις με την L ώστε ο K να περνάει:
    - πάνω από την L όταν ερχόμαστε στη διασταύρωση από την περιοχή των s_i,
    - κάτω από την L όταν ερχόμαστε στη διασταύρωση από την περιοχή των f_i.



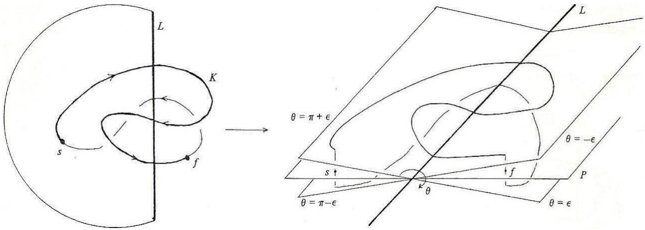


Θεώρημα Morton. Από οποιοδήποτε threading σε ένα διάγραμμα K προκύπτει ένας κρίκος braided.

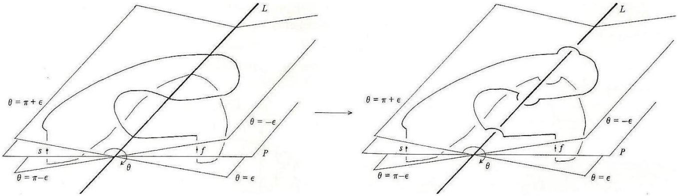
Θεώρημα Morton. Από οποιοδήποτε threading σε ένα διάγραμμα K προκύπτει ένας κρίκος braided.

Απόδειξη

- Ισιώνουμε την καμπύλη L με ισοτοπία του επιπέδου P στο οποίο βρίσκεται, ώστε να αφήνει από τη μία πλευρά τα s_i και από την άλλη τα f_i.
- Προβάλουμε τα overpasses του K από το P στα ημιεπίπεδα $\theta = -\epsilon$ και $\theta = \pi + \epsilon$ και ομοίως τα underpasses στα ημιεπίπεδα $\theta = \epsilon$ και $\theta = \pi - \epsilon$.

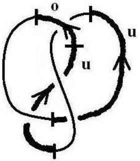


- Τα overpasses και underpasses συνδέονται με κατακόρυφα τόξα που περνάνε από τα s_i και f_i.
- Εκτός από τα σημεία όπου το K τέμνει τον άξονα L, η πολική συντεταγμένη αυξάνει μονότονα, εφόσον είναι σταθερή στα ημιεπίπεδα και αύξουσα στα κατακόρυφα τόξα.
- Για τα σημεία τομής με τον L κάνουμε τα εξής:
    - Τα τμήματα που περνούν από την πλευρά των S προς τα F, τα ισοτοπούμε ώστε να περνούν πάνω και σε απόσταση r από τον L.
    - Τα τμήματα που περνούν από την πλευρά των F προς τα S, τα ισοτοπούμε ώστε να περνούν κάτω και σε απόσταση r από τον L.



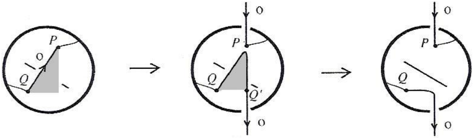
Με τον L ως άξονα η K αυξάνει μονότονα ως προς την πολική συντεταγμένη. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι το $K \cup L$ είναι braided. $\square$

- Ο άξονας της κοτσίδας είναι μια ευθεία οριζόντια παράλληλη στο επίπεδο της κοτσίδας.
- Σημαδεύοντας τα τοπικά ακρότατα, υποδιαιρούμε το διάγραμμα σε τόξα με φορά:
  - θετική για αυτά που έχουν φορά προς τα κάτω (down-arcs)
  - αρνητική για αυτά που έχουν φορά προς τα πάνω (up-arcs)

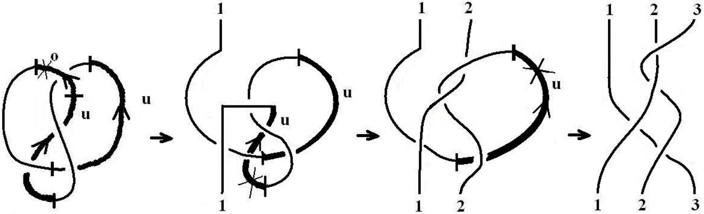


- Θέλουμε να φτάσουμε σε κοτσίδα με φορά από πάνω προς τα κάτω. Συνεπώς, κρατάμε τα down-arcs και απαλείφουμε τα up-arcs. Αρχικά, τα υποδιαιρούμε σε "άνω" ("*o*"), "κάτω" ("*u*") και "ελεύθερα" ("*f*") υποτόξα.

- Απαλείφουμε τα υποτόξα ως εξής: Κόβουμε σε ένα σημείο τους και τραβάμε τα δύο ελέυθερα άκρα, το άνω προς τα πάνω και το κάτω προς τα κάτω, αλλά και τα δύο πάνω από το υπόλοιπο διάγραμμα, αν η σήμανση του υποτόξου είναι "*o*" ή "*f*" ή κάτω από το υπόλοιπο διάγραμμα, αν η σήμανση είναι "*u*" ή "*f*".



- Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μια ανοικτή κοτσίδα με αριθμό κλωστών όσα τα υποτόξα που απαλείφθηκαν. □



(Θεώρημα Markov, Weinberg, 1936)

Δύο προσανατολισμένοι κόμβοι (ή κρίκοι) είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιεσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους είναι ισοδύναμες μέσω σχέσεων στις ομάδες $\mathbf{B_n}$ και μέσω των κινήσεων:

(i) *Συζυγία* σε κάθε $\mathbf{B_n}$: $\alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$
(ii) *Κίνηση Markov* : $\mathbf{B_n} \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B_{n+1}}$

(Θεώρημα Markov, Weinberg, 1936)

Δύο προσανατολισμένοι κόμβοι (ή κρίκοι) είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιεσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους είναι ισοδύναμες μέσω σχέσεων στις ομάδες $\mathbf{B_n}$ και μέσω των κινήσεων:

(i) *Συζυγία* σε κάθε $\mathbf{B_n}$: $\alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$
(ii) *Κίνηση Markov* : $\mathbf{B_n} \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B_{n+1}}$

Το Θεώρημα Markov επιτρέπει την κατασκευή αναλλοίωτων ισοτοπίας κόμβων, χρησιμοποιώντας τις ομάδες των κοτσίδων και αλγεβρικά εργαλεία.

(Θεώρημα Markov, Weinberg, 1936)

Δύο προσανατολισμένοι κόμβοι (ή κρίκοι) είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιεσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες τους είναι ισοδύναμες μέσω σχέσεων στις ομάδες $\mathbf{B_n}$ και μέσω των κινήσεων:

(i) *Συζυγία* σε κάθε $\mathbf{B_n}$: $\alpha \sim \sigma_i^{-1} \alpha \sigma_i$
(ii) *Κίνηση Markov* : $\mathbf{B_n} \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in \mathbf{B_{n+1}}$

Το Θεώρημα Markov επιτρέπει την κατασκευή αναλλοίωτων ισοτοπίας κόμβων, χρησιμοποιώντας τις ομάδες των κοτσίδων και αλγεβρικά εργαλεία.

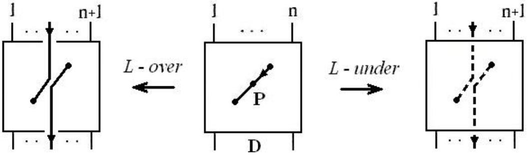
Η πρώτη αναλλοίωτη κατασκευάστηκε από τον V.F.R. Jones (1984), κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Markov. Για αυτή του την εργασία τιμήθηκε με το βραβείο Fields.

Το Θεώρημα Markov έχει αποδειχθεί από τους:

- A.A. Markov - N. Weinberg (1936)
- J.S. Birman (1976)
- H.R. Morton (1986)
- Σ. Λαμπροπούλου -C.P. Rourke (1997)
- P. Traczyk (1998)
- J.S. Birman - W.W. Menasco (2001)

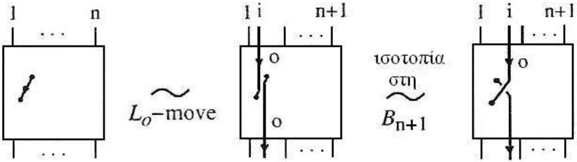
Ο λόγος που εμφανίστηκαν τόσες αποδείξεις, είναι γιατί μετά την κατασκευή των αναλλοίωτων από τον Jones, οι μαθηματικοί ξανακέρδισαν το ενδιαφέρον τους για τη Θεωρία Κόμβων.

(Η κίνηση L) Σε μια κοτσίδα, κόβουμε σε ένα σημείο της και τραβάμε τα ελεύθερα άκρα, **το άνω προς τα πάνω** και το κάτω προς τα κάτω αλλά **και τα δύο** είτε **πάνω** είτε κάτω **από την υπόλοιπη κοτσίδα**, δημιουργώντας ένα νέο ζεύγος κλωστών.

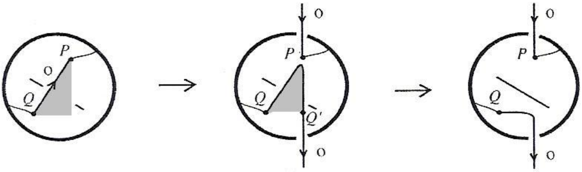


Η κοτσίδα που προκύπτει μετά την εφαρμογή μιας κίνησης L, έχει κλείσιμο ισοτοπικό με την αρχική.

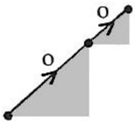
Η κίνηση L με μικρή ισοτοπία μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:



Έστω QP up-arc στο οποίο εφαρμόζεται κίνηση L. Το ορθογώνιο τρίγωνο πάνω στο οποίο ολισθαίνει η καινούρια κάτω κλωστή, καλείται *τρίγωνο ολίσθησης*. Λέμε ότι το τρίγωνο ολίσθησης είναι τύπου over ή under σύμφωνα με τη σήμανση του up-arc.



Δύο τρίγωνα ολίσθησης λέγονται *γειτονικά* αν βρίσκονται στο ίδιο τόξο και έχουν μία κοινή κορυφή.



Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markov αποδεικνύεται το παρακάτω ισοδύναμο.

(**Θεώρημα Markov μίας κίνησης**) Δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν δύο οποιεσδήποτε κοτσίδες τους διαφέρουν κατά κινήσεις L.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markov αποδεικνύεται το παρακάτω ισοδύναμο.

(**Θεώρημα Markov μίας κίνησης**) Δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν δύο οποιεσδήποτε κοτσίδες τους διαφέρουν κατά κινήσεις L.

(**Λήμμα**) Η ισοδυναμία στο $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B_n}$ που επάγεται από το Θεώρημα Markov είναι η ίδια με αυτή που επάγεται από το Θεώρημα Markov μίας κίνησης.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markov αποδεικνύεται το παρακάτω ισοδύναμο.

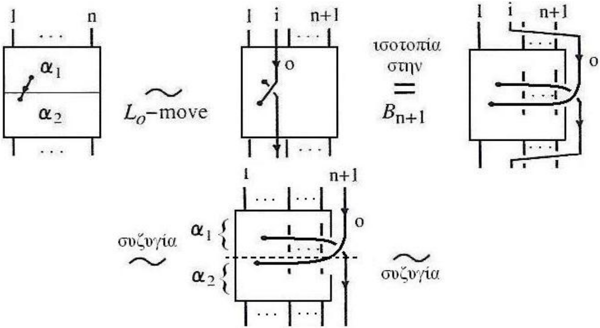
(**Θεώρημα Markov μίας κίνησης**) Δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν δύο οποιεσδήποτε κοτσίδες τους διαφέρουν κατά κινήσεις L.

(**Λήμμα**) Η ισοδυναμία στο $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B_n}$ που επάγεται από το Θεώρημα Markov είναι η ίδια με αυτή που επάγεται από το Θεώρημα Markov μίας κίνησης.

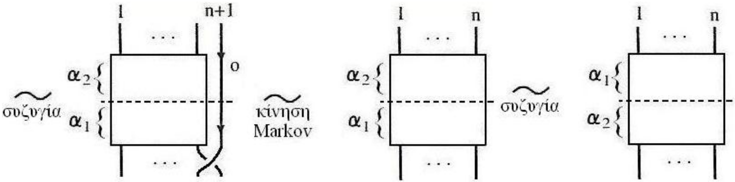
Για την απόδειξη του λήμματος θα δειχθούν τα εξής:

- ($\Rightarrow$) Η κίνηση L μπορεί να παραχθεί από συζυγία κοτσίδων και μια κίνηση Markov.
- ($\Leftarrow$) Οι κινήσεις συζυγία και κίνηση Markov του Θεωρήματος Markov μπορούν να παραχθούν από κινήσεις L.

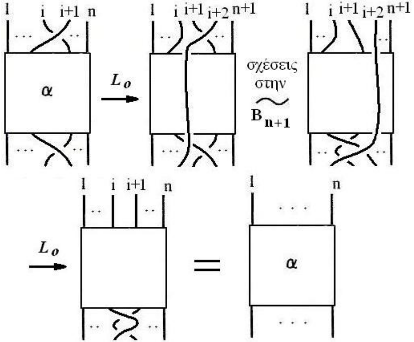
($\Rightarrow$)



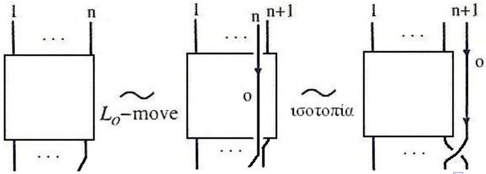
Αλλά από συζυγία έχουμε: $\alpha_1\alpha_2 \sim \alpha_2\alpha_1$, διότι $\alpha_1\alpha_2 \sim \alpha_2(\alpha_1\alpha_2)\alpha_2^{-1}$



(⇐) Για την συζυγία έχουμε:



Η κίνηση Markov είναι μια ειδική περίπτωση κίνησης L:



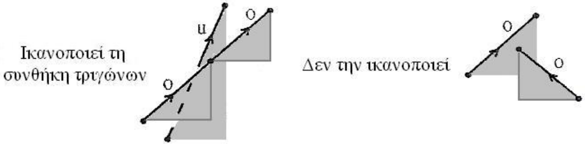
Για την απόδειξη του Θεωρήματος Markov μίας κίνησης θα πρέπει να δείξουμε τα εξής:

α) Διαφορετικές επιλογές στο braiding ενός διαγράμματος δίνουν L-ισοδύναμες κοτσίδες (στατικό μέρος).

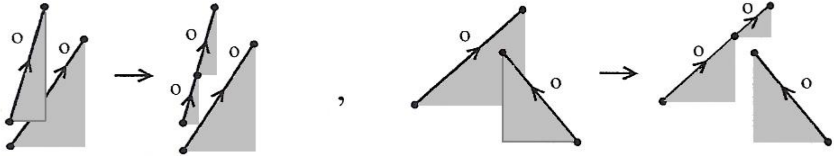
- Αν προσθέσουμε σε ένα up-arc α ένα σημείο υποδιαίρεσης P και ονομάσουμε τα δύο καινούρια up-arcs α_1 και α_2 (με τη σήμανση του α), οι τελικές κοτσίδες είναι L-ισοδύναμες.
- Από την απαλοιφή ενός ελεύθερου up-arc στο διάγραμμα, για το οποίο έχουμε την επιλογή σήμανσης "o" ή "u", προκύπτουν L-ισοδύναμες κοτσίδες ανεξάρτητα από τη σήμανση που θα επιλέξουμε.

β) Κινήσεις Reidemeister στο διάγραμμα επάγουν L-ισοδύναμες κοτσίδες (κινητικό μέρος).

Συνθήκη τριγώνων : Σε ένα διάγραμμα κόμβου μη γειτονικά τρίγωνα επιτρέπεται να τέμνονται μόνο αν είναι αντίθετου τύπου.

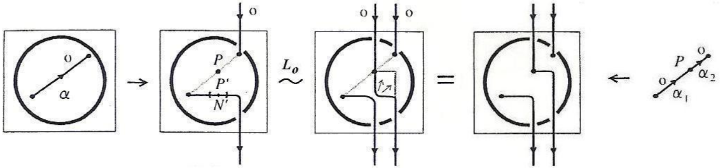


Η συνθήκη τριγώνων μπορεί να ικανοποιείται πάντα. Στην περίπτωση που παραβιάζεται, υποδιαιρούμε το ένα τόξο σε μικρότερα υποτόξα, μέχρι τα μικρότερα τρίγωνα ολίσθησης που δημιουργούνται να μην την παραβιάζουν.



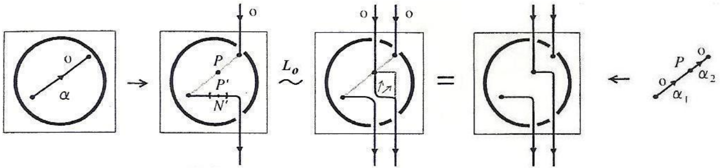
α) Στατικό μέρος. Διαφορετικές επιλογές στο braiding.

- Προσθήκη σημείου υποδιαίρεσης.

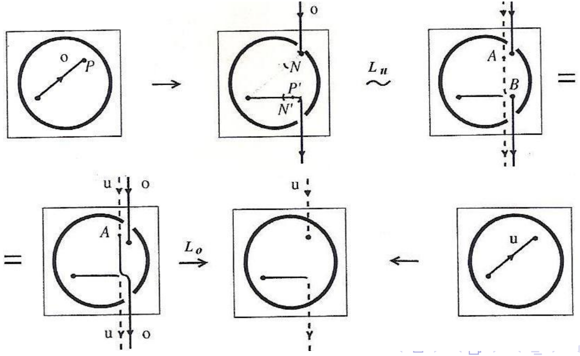


α) Στατικό μέρος. Διαφορετικές επιλογές στο braiding.

- Προσθήκη σημείου υποδιαίρεσης.

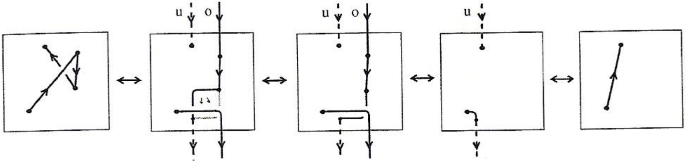


- Ανεξαρτησία επιλογής σήμανσης “*o*” ή “*u*”.



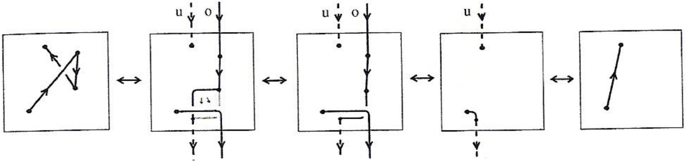
β) Κινητικό μέρος.

- *RI*

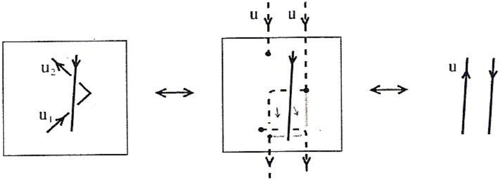


β) Κινητικό μέρος.

- *RI*

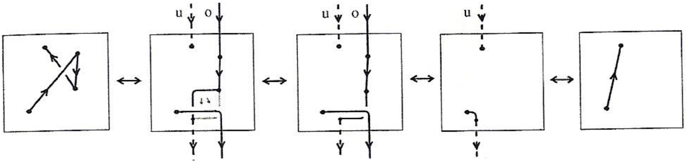


- *RII*

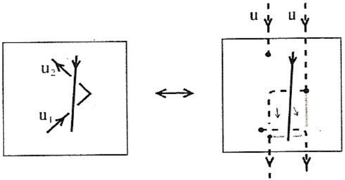


β) Κινητικό μέρος.

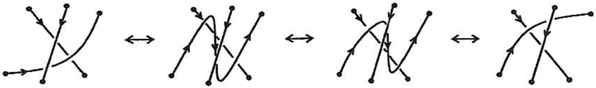
- *RI*



- *RII*



- *RIII*



Η απόδειξη του Θεωρήματος Markov εξαρτάται από το braiding. Έτσι για την απόδειξη του:

- η J.S. Birman (1976) χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο του Alexander,
- ο H.R. Morton (1986) χρησιμοποίησε τον δικό του αλγόριθμο "threading" για μετατροπή διαγραμμάτων σε κοτσίδες,
- ο P. Traczyk (1998) χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο του P.Vogel για τη μετατροπή των διαγραμμάτων σε γραφήματα,
- και οι J.S. Birman - W.W. Menasco (2001) χρησιμοποίησαν τις ιδέες του D. Bennequin (1982).

Σας ευχαριστώ για το χρόνο σας.

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ !